

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 受奇異訊號影響的赫斯特參數估測

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2213-E-040-003-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：中山醫學大學資訊管理學系

計畫主持人：張炎清

計畫參與人員：王仁昭、陳國振

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 27 日

中文摘要：

離散時間分數維度高斯雜訊(discrete-time fractional Gaussian noise, DFGN)被證明是一種正規的程序(regular process)，此程序依據伍德(Wold)和 Kolmogorov 的理論能夠使用無限階數的自回歸模式來描述。考慮理論和實際的情況，我們提出一個快速且精確的演算法，此演算法在計算複雜度(computational complexity)上明顯超越其他估測器，此外在精確度上非常接近最大相似估測器(maximum likelihood estimator, MLE)，因此它是一個很有競爭性的估測器。由於此特性，我們進一步關心離散時間分數維度高斯雜訊在遭受奇異的程序(singular process)影響後，最大相似估測器、近似最大相似估測器的移動平均法(moving average method, MA)和近似最大相似估測器的自回歸模式法(autoregressive method, AR)的估測變化。

關鍵字：離散時間分數維度高斯雜訊、正規的程序、奇異的程序、最大相似估測器、移動平均法、自回歸模式法。

英文摘要：

The discrete-time fractional Gaussian noise (DFGN) is shown that it is a regular process. According to Wold and Kolmogorov's theorems, this process can be decomposed into one regular process and one singular process. Take both theory and practicality into consideration, we proposed a fast and accurate algorithm. This algorithm surpasses the other estimators in computational complexity. In addition, it is very approximate to maximum likelihood estimator (MLE) in accuracy. Therefore, it is a much competitive estimator. Due to this property, we further concern the variation among the MLE, moving average method (MA), and autoregressive method (AR) when they are interfered with singular processes.

Keyword: discrete-time fractional Gaussian noise, regular process, singular process, maximum likelihood estimator, moving average method, autoregressive method

## 一、前言

離散時間分數維度布朗運動(discrete-time fractional Brownian motion, DFBM)和離散時間分數高斯雜訊廣泛地被應用在自然現象和醫學工程領域,離散時間分數高斯雜訊是離散時間分數維度布朗運動的增量程序(increment process),有些自然現象適合用離散時間分數維度布朗運動來描述,有些則適合用離散時間分數維度高斯雜訊來描述,由於這兩種訊號均被定義在一個有限的區間(0,1)的單一參數上,此參數稱為赫斯特參數(Hurst parameter)[1],使得這兩種程序更加吸引人們的注意。

伍德(Wold)證明任何穩固的程序(stationary process)能夠被分解為正規的程序和奇異的程序的和[2-4],此正規的程序可以表示成無限階數的移動平均模式。依據 Kolmogorov 的理論[5],任何移動平均的模式可以描述成自回歸的模式。由於離散時間分數維度高斯雜訊屬於穩固的程序,並且它的自我相關函數(autocorrelation function, ACF)具有長程相關性(long-term correlation),使得它被認為含有奇異的程序。自從離散時間分數維度高斯雜訊被證明是一種正規的程序[6]後,一個快速且精確的演算法被提出[6-7]。此演算法在計算複雜度上優於其他的估測器,並且在精確度上非常接近最佳的相似估測器,加上最大相似估測器的緩慢收斂和實際運算的限制,使得它成為一個非常具有競爭性的估測器。

關於赫斯特參數估測的方法,比較值得注意的有最大相似法(maximum likelihood estimator, MLE)[8]、移動平均法(moving average method, MA method)[9]和自回歸模式法(autoregressive method, AR method)[6-7]。由於在量測過程中大都使用電訊號轉換,使得所量測的訊號中經常會出現固定頻率的訊號,例如 60Hz 的訊號,此訊號正是奇異訊號的一種。因此本計劃想要研究當正規的訊號遭受奇異的訊號干擾後,這三種常見方法的比較。

## 二、研究目的

本計劃的研究目的是使用赫斯特參數估測法去估測離散時間分數維度高斯雜訊在遭受奇異訊號干擾後的赫斯特參數估測值的變化,在此計畫中我們使用常見的三種方法:MLE、MA 和 AR 法。雖然最大相似估測器在理論上有最大的精確度,然而因為它需要大量的矩陣運算使得它的收斂時間非常緩慢,甚至在  $N=400$  和  $H \geq 0.9$ ,  $N=300$  和  $H \geq 0.925$ ,  $N=200$  和  $H \geq 0.95$ ,  $N=150$  和  $H \geq 0.99$ [7] 等等時會出現除以零的情形,使得它的使用性大為降低。在九十一年度的研究計劃[7]中我們已經找出可以非常接近最大相似估測器的演算法,此方法可以在  $N$  不大的情況下很接近 MLE,然而當  $N$  越大時可以得到非常好的精確度,此方法即是自回歸模式法(AR)。在九十一年度的研究計劃中,我們也證實 AR 法比 MA 法具有更快和更高的精確度,然而因為 MA 法可以事先過濾奇異訊號使得它在本計劃中被預期會有不錯的結果,因此仍被列入比較的方法中。

本計劃的另一個目的是評估我們於九十一年度的計劃中所提出的演算法是否在奇異訊號干擾下仍具有相對的競爭性,甚至可以在某種條件下超越 MLE 法,如果可以的話,毫無疑問地,自回歸模式法將在未來的赫斯特參數估測上扮演非常重要的角色。

## 三、文獻探討

雖然已有數種估測離散時間分數維度布朗運動的赫斯特參數的估測法：變異法(variance method)[10]、盒計數法(box-counting method)[11-14]、最大相似估測器(MLE)[8]和近似最大相似估測器的移動平均法[9]，但都是在沒有考慮到其他因素的情況下進行。關於這些方法的詳細描述可參閱[7]的說明。本計劃將考慮在奇異訊號干擾下的赫斯特參數估測，以了解赫斯特參數在數種頻率和不同程度影響下所產生的變化。

#### 四、研究方法

本研究方法是在已有的方法下去評估在奇異訊號干擾下的赫斯特參數估測，這些估測法分別為 MLE、MA 和 AR 法。選擇 MLE 的原因是它在純粹 DFGN 下理論上具有最佳的赫斯特估測值，至於 MA 法雖然它在純粹 DFGN 下沒有競爭性，但它是唯一一種可以事先濾掉奇異訊號的方法，本計劃想了解它在有奇異訊號干擾下，是否會提高它的競爭優勢，最後 AR 法是我們在[6]中所提出的方法，並進而在九十一年度的計劃[7]中找到更快和更精確的演算法，這個方法是目前在綜合計算複雜度和精確度上最具有吸引力的方法。

在此計畫中我們分別評估四種奇異訊號的影響，它們的自我關聯函數分別為  $r(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega_1 \tau)$ 、 $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau)]$ 、 $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau) + \cos(\omega_3 \tau)]$  和相當特殊的有限頻帶(band-limited)的  $r(\tau) = \sigma^2$  for  $\tau = 0$ ， $r(\tau) = 0$  for  $\tau = 2k$ ， $r(\tau) = \sigma^2 \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}$  for  $\tau = 2k+1$ ，此處  $\omega_1 = 1$ ， $\omega_2 = 2$  和  $\omega_3 = 3$ ，亦即  $f_1 = 1/2\pi \approx 0.159$ ， $f_2 = 1/\pi \approx 0.318$  和  $f_3 = 3/2\pi \approx 0.477$ 。

#### 五、結果與討論

透過前述三種方法的估測，我們得到如下的結果，此三種方式都在相同條件下進行赫斯特參數( $H$ )的估測，並算出它們的平均平方誤差值(average mean-squared error, average MSE)，依據此一數據來評估它們的精確度，其中  $H$  的範圍在 0.1:0.1:0.9，每個  $H$  值的 ACF 加上奇異訊號的 ACF 去產生 100 組的 realization，亦即將此 9 個值的 100 組 realization 的 MSE 取平均(mean)後再平均(average)。表格中的第一欄表示比較三種的方法：AR、MA 和 MLE；第二欄表示所加入的奇異雜訊的變異差(variance,  $\sigma_n^2$ )相對於所要估測的訊號( $\sigma_s^2$ )的比值，例如 0.01 表示  $\sigma_n^2 / \sigma_s^2 = 0.01$ ，若以訊號對雜訊的比值(signal-to-noise ratio, SNR)則為  $\text{SNR} = 10 \log_{10}(\sigma_s^2 / \sigma_n^2) = 20$ ，其他值 0 對應到  $\text{SNR} = \infty$ ，0.1 對應到  $\text{SNR} = 10$ ，1 對應到  $\text{SNR} = 0$ ；第一列表示資料量(data length)。注意：有網底的部分表示 AR 優於 MLE 的地方。

表格 1: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega_1 \tau)$  的訊號的平均 MSE。

C1		50	100	200	400	800	1600	3200
AR	0	1.09E-02	5.01E-03	2.14E-03	7.86E-04	5.22E-04	3.33E-04	1.39E-04
	0.01	1.10E-02	4.96E-03	2.17E-03	7.71E-04	5.21E-04	3.53E-04	1.53E-04

	0.1	1.21E-02	4.91E-03	2.12E-03	8.21E-04	5.79E-04	3.87E-04	1.77E-04
	1	1.46E-02	6.13E-03	2.53E-03	1.01E-03	7.17E-04	4.83E-04	2.80E-04
MA	0	1.40E-02	6.74E-03	4.14E-03	4.60E-03	5.36E-03	4.20E-03	5.15E-03
	0.01	1.41E-02	6.74E-03	4.16E-03	4.62E-03	5.44E-03	4.25E-03	5.15E-03
	0.1	1.47E-02	6.76E-03	4.17E-03	4.71E-03	5.60E-03	4.30E-03	5.18E-03
	1	1.82E-02	8.12E-03	4.88E-03	5.19E-03	5.87E-03	4.44E-03	5.22E-03
MLE	0	7.24E-03	3.58E-03	1.42E-03	6.56E-04			
	0.01	7.26E-03	3.59E-03	1.42E-03	6.52E-04			
	0.1	7.69E-03	3.80E-03	1.58E-03	7.34E-04			
	1	3.03E-02	2.53E-02	2.35E-02	1.46E-02			

表格 2: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau)]$  的訊號的平均 MSE。

C2		50	100	200	400	800	1600	3200
AR	0	1.09E-02	5.01E-03	2.14E-03	7.86E-04	5.22E-04	3.33E-04	1.39E-04
	0.01	1.14E-02	5.06E-03	2.19E-03	7.69E-04	5.34E-04	3.42E-04	1.57E-04
	0.1	1.44E-02	5.78E-03	2.58E-03	1.06E-03	5.98E-04	3.86E-04	2.11E-04
	1	2.25E-02	9.38E-03	3.94E-03	1.75E-03	9.56E-04	4.75E-04	2.75E-04
MA	0	1.40E-02	6.74E-03	4.14E-03	4.60E-03	5.36E-03	4.20E-03	5.15E-03
	0.01	1.42E-02	6.77E-03	4.16E-03	4.52E-03	5.32E-03	4.23E-03	5.17E-03
	0.1	1.56E-02	7.15E-03	4.27E-03	4.48E-03	5.27E-03	4.25E-03	5.28E-03
	1	2.35E-02	1.01E-02	5.35E-03	5.24E-03	5.28E-03	4.36E-03	5.50E-03
MLE	0	7.24E-03	3.58E-03	1.42E-03	6.56E-04			
	0.01	7.34E-03	3.65E-03	1.46E-03	7.20E-04			
	0.1	9.18E-03	5.81E-03	3.05E-03	2.85E-03			
	1	3.73E-02	3.32E-02	3.25E-02	2.70E-02			

表格 3: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau) + \cos(\omega_3 \tau)]$  的訊號的平均 MSE。

C3		50	100	200	400	800	1600	3200
AR	0	1.09E-02	5.01E-03	2.14E-03	7.86E-04	5.22E-04	3.33E-04	1.39E-04
	0.01	1.19E-02	5.43E-03	2.39E-03	9.19E-04	6.60E-04	4.11E-04	1.76E-04
	0.1	2.24E-02	1.09E-02	5.38E-03	2.73E-03	1.97E-03	9.60E-04	7.16E-04
	1	6.79E-02	3.66E-02	1.93E-02	1.07E-02	6.54E-03	3.63E-03	1.93E-03
MA	0	1.40E-02	6.74E-03	4.14E-03	4.60E-03	5.36E-03	4.20E-03	5.15E-03
	0.01	1.46E-02	6.70E-03	4.25E-03	4.41E-03	5.35E-03	4.22E-03	5.20E-03
	0.1	2.03E-02	8.72E-03	5.59E-03	4.91E-03	5.30E-03	4.30E-03	5.31E-03
	1	5.38E-02	2.75E-02	1.77E-02	1.18E-02	7.58E-03	5.69E-03	6.53E-03
MLE	0	7.24E-03	3.58E-03	1.42E-03	6.56E-04			
	0.01	7.56E-03	3.87E-03	1.74E-03	9.36E-04			
	0.1	1.40E-02	9.81E-03	8.10E-03	7.37E-03			
	1	6.80E-02	5.38E-02	5.32E-02	5.06E-02			

表格 4: DFGN 加有限頻帶的訊號的平均 MSE。

BL		50	100	200	400	800	1600	3200
AR	0	1.09E-02	5.01E-03	2.14E-03	7.86E-04	5.22E-04	3.33E-04	1.39E-04
	0.01	1.12E-02	5.20E-03	2.29E-03	8.74E-04	6.36E-04	4.56E-04	2.44E-04
	0.1	1.51E-02	9.49E-03	6.34E-03	4.85E-03	4.88E-03	4.84E-03	4.57E-03
	1	6.81E-02	7.00E-02	6.88E-02	6.87E-02	7.02E-02	7.15E-02	7.12E-02
MA	0	1.40E-02	6.74E-03	4.14E-03	4.60E-03	5.36E-03	4.20E-03	5.15E-03
	0.01	1.42E-02	7.00E-03	4.38E-03	4.80E-03	5.72E-03	4.44E-03	5.26E-03
	0.1	1.79E-02	1.21E-02	9.27E-03	9.74E-03	1.17E-02	9.64E-03	9.53E-03
	1	7.19E-02	7.69E-02	7.39E-02	7.64E-02	8.32E-02	7.77E-02	7.29E-02
MLE	0	7.24E-03	3.58E-03	1.42E-03	6.56E-04			
	0.01	7.47E-03	3.77E-03	1.62E-03	8.24E-04			
	0.1	1.23E-02	8.68E-03	6.67E-03	5.76E-03			
	1	6.90E-02	6.71E-02	6.57E-02	6.40E-02			

由上面的表格數據得知，MA 法在單純的奇異訊號組合干擾下，在平均 MSE 上並沒有明顯的下降，即使它的方法可事先濾掉奇異的訊號，然而在有限頻帶的干擾下仍然受到相當大的影響。縱使 MA 法受到較小的影響，然而整體的表現仍然遠低於 AR 法。另一方面，比較值得關注的是，AR 法在單純的奇異訊號組合干擾下，當干擾的 SNR 在 20 的時候，很明顯地超越 MLE 法，在 10 的時候當資料量大於等於 100 時，也優於 MLE 法，它們差距被歸納如下表，有網底的部分表示 AR 優於 MLE 的地方。

表格 5: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega_1 \tau)$  的訊號的平均 MSE 差距：AR-MLE。

C1		50	100	200	400
AR	1	1.46E-02	6.13E-03	2.53E-03	1.01E-03
MLE	1	3.03E-02	2.53E-02	2.35E-02	1.46E-02
AR-MLE	1	-1.58E-02	-1.92E-02	-2.10E-02	-1.36E-02

表格 6: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau)]$  的訊號的平均 MSE 差距：AR-MLE。

C2		50	100	200	400
AR	0.1	1.44E-02	5.78E-03	2.58E-03	1.06E-03
	1	2.25E-02	9.38E-03	3.94E-03	1.75E-03
MLE	0.1	9.18E-03	5.81E-03	3.05E-03	2.85E-03
	1	3.73E-02	3.32E-02	3.25E-02	2.70E-02
AR-MLE	0.1	5.22E-03	-3.00E-05	-4.72E-04	-1.79E-03
	1	-1.47E-02	-2.38E-02	-2.86E-02	-2.52E-02

表格 7: DFGN 加  $r(\tau) = \sigma^2 [\cos(\omega_1 \tau) + \cos(\omega_2 \tau) + \cos(\omega_3 \tau)]$  的訊號的平均 MSE 差距：AR-MLE。

C3		50	100	200	400
AR	0.1	2.24E-02	1.09E-02	5.38E-03	2.73E-03
	1	6.79E-02	3.66E-02	1.93E-02	1.07E-02
MLE	0.1	1.40E-02	9.81E-03	8.10E-03	7.37E-03

	1	6.80E-02	5.38E-02	5.32E-02	5.06E-02
AR-MLE	0.1	8.42E-03	1.05E-03	-2.72E-03	-4.65E-03
	1	-1.11E-04	-1.71E-02	-3.39E-02	-3.99E-02

表格 8: DFGN 加有限頻帶的訊號的平均 MSE 差距：AR-MLE。

BL		50	100	200	400
AR	0.1	1.51E-02	9.49E-03	6.34E-03	4.85E-03
	1	6.81E-02	7.00E-02	6.88E-02	6.87E-02
MLE	0.1	1.23E-02	8.68E-03	6.67E-03	5.76E-03
	1	6.90E-02	6.71E-02	6.57E-02	6.40E-02
AR-MLE	0.1	2.84E-03	8.17E-04	-3.21E-04	-9.13E-04
	1	-8.61E-04	2.86E-03	3.05E-03	4.73E-03

## 六、參考文獻

1. B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM Rev.*, vol. 10, pp. 422-437, Oct. 1968.
2. M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series, Volume 2: Multivariate Series, Prediction and Control*. New York: Academic Press, 1981.
3. A. N. Shiryaev, *Probability*, 2<sup>nd</sup> ed., translated by R. P. Boas. New York: Springer-Verlag, 1996.
4. J. L. Doob, *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons, 1953.
5. S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory & Application*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1988.
6. Chang, Y. C., and Chang, S. "A fast estimation algorithm on the Hurst parameter of discrete-time fractional Brownian motion," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 554-559, March 2002.
7. 離散時間分數維度高斯雜訊之自回歸模式的階數決定 (NSC91-2213-E-235-001)
8. T. Lundahl, W. J. Ohley, S. M. Kay, and R. Siffert, "Fractional Brownian motion: A maximum likelihood estimator and its application to image texture," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. MI-5, no. 3, pp. 152-161, Sep. 1986.
9. S. C. Liu and S. Chang, "Dimension estimation of discrete-time fractional Brownian motion with applications to image texture classification," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no. 8, pp. 1176-1184, Aug. 1997.
10. A. P. Pentland, "Fractal-based description of natural scenes," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-6, no. 6, pp. 661-674, Nov. 1984.
11. N. Sarkar and B. B. Chaudhuri, "An efficient approach to estimation fractal dimension of textural images," *Pattern Recognition Society*, vol. 25, no. 9, pp. 1035-1041, 1992.
12. S. S. Chen, J. M. Keller, and R. M. Crownover, "On the calculation of fractal features from images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 15, no. 10, pp. 1087-1090, Oct. 1993.
13. N. Sarkar and B. B. Chaudhuri, "An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image," *IEEE Trans. System, Man, and Cybernetics*, vol. 24, no. 1, pp. 115-120, Jan. 1994.

14. X. C. Jin, S. H. Ong, and Jayasooriah, "A practical method for estimating fractal dimension," *Patter Recognition Letters*, vol. 16, pp. 457-464, 1995.

## 七、計劃成果自評

本計劃預期完成的部分是研究離散時間分數維度高斯雜訊在遭受奇異訊號，例如電訊號，影響下赫斯特參數的估測，並進而找到消除此奇異訊號成分的方法，最後評估數種較有競爭性的估測法，其目的主要是與九十一年度計劃所提出的 AR 法做比較，來了解他們的性能差異。為了評估這些估測器的性能，本計劃使用最佳的 MLE 法和可事先濾掉奇異成分的 MA 法與 AR 法做比較。結果出乎意料，MA 法雖然可事先濾掉奇異成分，但因為它的誤差值很大使得無法有效反應此部份的成效在結果上，我們從表格可知，MA 法的確受到奇異訊號的影響最小。另一方面，MLE 法雖然是最佳的估測器，但因為受到奇異訊號很大的影響，使得它在 SNR 大於等於 10 時會出現 MSE 落後我們所提出的 AR 法的情況，這也提高 AR 法在估測赫斯特參數的競爭性，對於一個擁有絕佳的執行效率的估測器，也擁有接近 MLE 性能的估測器而言，若訊號受到奇異訊號影響後可以超越 MLE，則將是一個很大的進步，畢竟量測經常來自電訊號的轉換，而電訊號正是奇異訊號的一種現象，除非確定所量測的訊號沒有電訊號，資料量不大，且不受估測時間影響的情況下，否則 AR 法將是目前一個最有競爭性和吸引力的估測器。

雖然目前尚未找到適合消除奇異訊號的有效方法，但由於在受到奇異訊號影響下 AR 法優於 MLE 法，使得本計劃的成果具有相當價值的貢獻，此結果將提昇 AR 法應用在實際的赫斯特參數估測上，因此非常適合將此價值發表在學術期刊上。