

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

顯隱混合算則於二維穿臨界流場之模擬計算

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2211-E-040-005-

執行期間：94年08月01日至95年07月31日

執行單位：中山醫學大學資訊管理學系

計畫主持人：曾明性

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 24 日

一、緣由與目的

自從十六年前數學家發展雙曲線方程式之守恆律 (Hyperbolic Conservation Law) 後，開啟了數值計算界一個新興的研究風潮，其中 TVD 算則的研發最屬熱門。台灣河川坡陡流急屬島國地形，其流場包含亞臨界、超臨界與混合流況，較歐美平原型河川之單純亞臨界流場複雜甚多，一般的洪災演算模式並無法進行此種穿臨界 (Transcritical) 混合流況的模擬計算。當進行洪災預警演算時最需要的就是一套穩定、快速又精確的本土實用性之洪災演算模式，本文主要研究目的為基於有限體積法，提出一套新的混合演算法，包含顯式 MacCormack 算則、顯式 TVD-MacCormack 算則、及隱式 MacCormack 算則，以進行一維及二維淺水方程式之數值模擬。

二、文獻回顧

近年來，若干學者提出以震波捕捉法來解 Saint Venant 方程式，例如 Jimenez and Chaudhry(1990)用有限差分法以人工滯度修改 MacCormack 演算法來模擬超臨界流；Alcrudo and Garcia-Navarro(1993)採用高解析 Godunov 型式完成二階精確度的演算；Yang and Hsu(1993)利用二階 ENO(Essentially Non-Oscillatory)演算法來研究非恆定激潮繞射；Fraccarollo and Toro(1995)用 WAF(Weight Averaged Flux)法修改 Godunov 型式，使潰壩試驗的模擬結果更有效；Zhao et al.(1996)比較出 FVS(Flux Vector Splitting)、FDS(Flux Difference Splitting)及 Osher 演算法對於振盪波的模擬，他們的結果顯示模擬不連續的明渠流三個方法都令人滿意；Louaked and Hanich(1998)採取 TVD Lax-Wendroff 演算法和 ACM(Artificial Compression Method)技術來解二維淺水方程式，以處理明渠急變流，結果顯示結合的方法完全實用且準確；申請人近年來使用的數值方法包含有限差分法與有限體積法，引進並改良應用新的數值算則包含 MacCormack、ROE、TVD、TVD-MacCormack、ENO 等高解析不震盪算則 (High-Resolution Non-Oscillatory Schemes) 於一維及二維明渠急變流計算的研究(Tseng 1999, Tseng & Chu 2000a, Tseng & Chu 2000b, Tseng et al. 2001, Tseng & Yen 2004)，證明這些方法的精確與優異性；但最新研究指出當河床發生劇烈變化時，TVD 算則會發生流量不守恆問題，如 LeVeque (1998), Vázquez-Cendón (1999), Hubbard and Garcia-Navarro (2000), Zhou et al. (2001), Tseng (2003), Tseng & Wang (2004), Tseng (2004)均對此流量不守恆問題提出不同改良技術之探討。

三、 研究方法

(1) 控制方程式

保守型之二維非恆定淺水流的控制方程式可寫成如下式表示：

連續方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

x 方向之動量方程式

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2)$$

y 方向之動量方程式

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial\left(hv^2 + \frac{gh^2}{2}\right)}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3)$$

上式水深平均之連續與動量方程式中， \bar{u}, \bar{v} 為 x, y 方向之水深平均流速； S_{0x}, S_{0y} 為 x, y 方向

之底床坡度 $\left(-\frac{\partial Z_b}{\partial x}, -\frac{\partial Z_b}{\partial y}\right)$ ；其中 S_{fx}, S_{fy} 為 x, y 方向之摩擦坡度

$$\left(S_{fx} = \frac{n^2 \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = \frac{n^2 \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h^{4/3}}, n \text{ 為曼寧係數} \right)。$$

(2) 有限體積法

為了簡便說明，本文將二維水深平均的控制方程式(1)、(2)及(3)式，以保守型式的矩陣式表示如下：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (4)$$

上式中， $\bar{F} = E\bar{i} + G\bar{j}$ ；守恆性物理量向量 $Q = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$ ； x 方向之通量向量 $E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{bmatrix}$ ； y

方向之通量向量 $G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}$ ；源項包含了底床坡度和阻力的影響。

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{ox} - \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}) \\ gh(S_{oy} - \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}) \end{bmatrix}$$

有限體積法係將待解的變數如速度(u, v)、水深 h 等變數儲存在網格中心，通量向量則置於網格邊界上。以下式為例，其中下標 m 表示為體積中心的平均值， V 為體積：

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} = -\frac{1}{V} \oint_s F \cdot d\bar{s} + S_m \quad (5)$$

利用有限體積法進行離散處理，上式可表如下(省略下標 m)：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{V} \sum_{k=1}^4 (F_k \cdot s_k) + S \quad (6)$$

(3) 顯隱混合演算法

為了使用者只要經由參數設定即可進行不同算則之模擬評估以獲取較適合的數值解，本研究利用兩個參數(θ, λ)把顯式 MacCormack 算則、顯式 TVD-MacCormack 算則、及隱式 MacCormack 算則進行整合，演算程序整合如下：

$$\text{步驟一：} \Delta Q^P = -\frac{\Delta t}{V} \left(\sum_{k=1}^2 F_k^+ \cdot s_k + \sum_{k=1}^2 F_k^- \cdot s_k^- \right) + \Delta t S(t) \quad (7-1)$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{V} \left(\sum_{k=1}^2 H_k \cdot s_k^- \right) \right) \delta Q_{i,j}^P = \Delta Q_{i,j}^P + \frac{\Delta t}{V} (H_1^+ \cdot s_1) \delta Q_{i+1,j}^P + \frac{\Delta t}{V} (H_2^+ \cdot s_2) \delta Q_{i,j+1}^P \quad (7-2)$$

$$Q^P(t + \Delta t) = Q(t) + \delta Q^P \quad (7-3)$$

其中， $\vec{H} = A^m \vec{i} + B^m \vec{j}$ ， $A_m = R_A D_A^m L_A$ ， $B_m = R_B D_B^m L_B$ ， $D = \text{diag} \{ \lambda^k \}$ ， A_m 及 B_m 為 modified Jacobian，計算公式如下：

$$A^m = R_A D_A^m L_A = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & u+c & u-c \\ 2c & v & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \max\left(0, |u| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \max\left(0, |u+c| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \max\left(0, |u-c| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -v & 0 & 1 \\ c-u & 1 & 0 \\ c+u & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

$$B^m = R_B D_B^m L_B =$$

$$\frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2c & u & u \\ 0 & v+c & v-c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \max\left(0, |v| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \max\left(0, |v+c| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \max\left(0, |v-c| - 0.5 \frac{V}{\Delta t A}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & -1 & 0 \\ c-v & 0 & 1 \\ c+v & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7-5)$$

步驟二：

$$\Delta Q_m^c = -\frac{\Delta t}{V} \left(\sum_{k=1}^2 F_k^p \cdot s_k + \sum_{k=1}^2 F_k^{p-} \cdot s_k^- \right) + \Delta t S_m^p(t + \Delta t) + \theta \frac{\Delta t}{V} \left[\sum_{k=-1/2}^{1/2} D_{i+k, j}(t) + \sum_{k=-1/2}^{1/2} D_{i, j+k}(t) \right] \quad (8-1)$$

$$\left(I + \frac{\Delta t}{V} \left(\sum_{k=1}^2 H_k^+ \cdot s_k \right) \right) \delta Q_{i, j}^c = \Delta Q_{i, j}^p + \frac{\Delta t}{V} (H_1 \cdot s_1^-) \delta Q_{i-1, j}^c + \frac{\Delta t}{V} (H_2 \cdot s_2^-) \delta Q_{i, j-1}^c \quad (8-2)$$

$$Q^c(t + \Delta t) = Q(t) + \delta Q^c \quad (8-3)$$

其中上標 p 和 c 分別代表預測及修正項的變數； F_k^- , F_k 及 F_k^+ 為上、中及下游體積邊界的通量向量； s_k^- 和 s_k 為上及下游體積邊界的表面積向量；下標 $k=1$ 及 $k=2$ 表示計算點在 x, y 方向之位置關係， D 為 TVD 的消散項。其中(7)式的預測項為前項差分，(8)式的修正項為後項差分。

$$\text{步驟三：} Q(t + \Delta t) = \frac{1}{2} [Q^p(t + \Delta t) + Q^c(t + \Delta t)] \quad (9)$$

本研究經推導提出上述混合算則(第 7-9 式)，當($\lambda=0, \theta=0$)為顯式 MacCormack 算則，當($\lambda=0, \theta=1$)為顯式 TVD-MacCormack 算則，當($\lambda \neq 0, \theta=0$)為隱式 MacCormack 算則。由於篇幅關係，邊界條件處理及許多符號的定義此處均先省略，請參閱相關文獻(Tseng and Chu 2000a-b, Tseng2003)。

四、 結果與討論

4.1 One-Dimensional Burgers Equation

本節比較三種顯式算則(explicit scheme：Lax-Wendroff scheme, 4-point upwind scheme, explicit MacCormack scheme)與三種隱式算則(implicit scheme：Crank-Nicolson scheme, Crank-Nicolson+dissipation scheme, implicit MacCormack scheme)，共六種算則進行 viscous Burgers' equation(如下式所示)的計算，模擬一初始不連續震波之傳播過程。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

$$\text{IC:} \begin{cases} u(x, 0) = 1, \text{ for } -2 \leq x \leq 0 \\ u(x, 0) = 0, \text{ for } 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad (11)$$

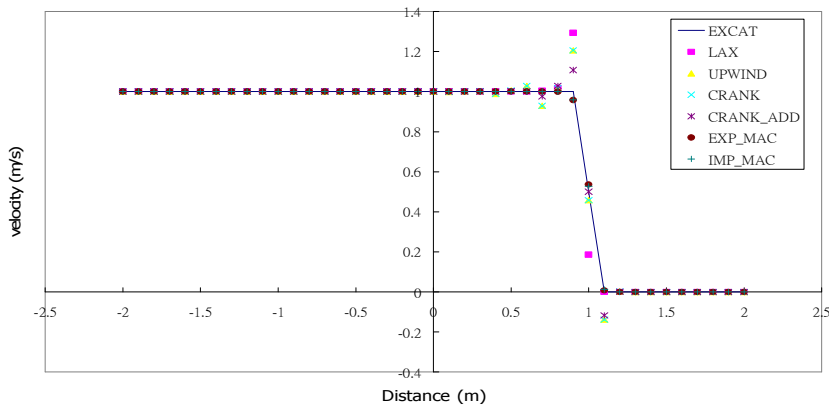
$$\text{BC:} \begin{cases} u(-2, t) = 1 \\ u(2, t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

計算條件為 $\nu = 0.001, \Delta x = 0.1, R_{\text{cell}} = 100$ 。各種算則的演算結果與確解的比較，如表一及圖一所示。可獲致如下結論：(1) 三種顯式算則均明顯受到可蘭條件 $Cr \leq 1$ 的限制，而三種隱式算則不受 $Cr \leq 1$ 的嚴格限制。(2) 三種顯式算則中以 explicit MacCormack scheme 的模擬結果較 Lax-Wendroff scheme 與 4-point upwind scheme 為佳。(3) 三種隱式算則以 implicit MacCormack scheme 的模擬結果較 Crank-Nicolson scheme, 與 Crank-Nicolson+dissipation scheme 為佳。(4) 綜合六種算則的模擬結果比較可得知 Implicit MacCormack scheme 不論是精確度或穩定度上皆是最優良的，而且演算時距不受 $Cr \leq 1$ 的嚴格限制。

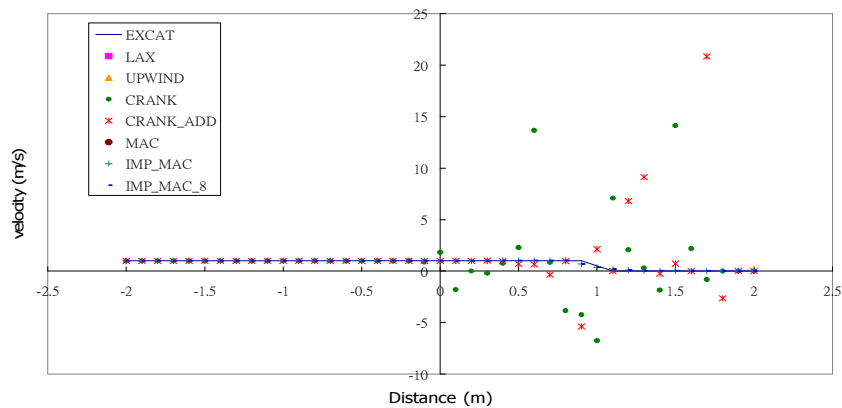
表一 六種算則演算結果與確解的比較表

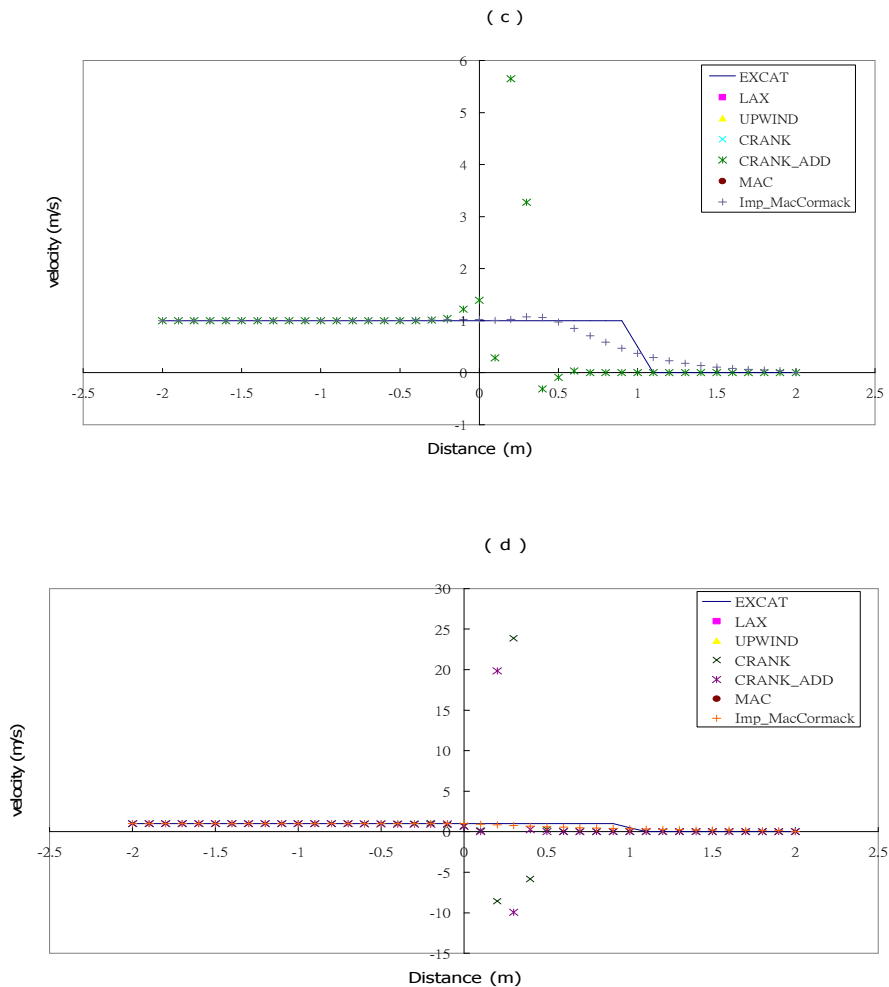
Cr	Lax	Upwind	Crank	Crank Add	Explicit	Implicit
1	6.90E-02	4.24E-02	4.24E-02	2.61E-02	8.89E-03	8.19E-03
2	x	x	4.51E+00	5.15E+00	x	6.60E-02
5	x	x	x	9.43E-01	x	1.44E-01
10	x	x	4.14E+00	3.52E+00	x	2.22E-01

(a)



(b)

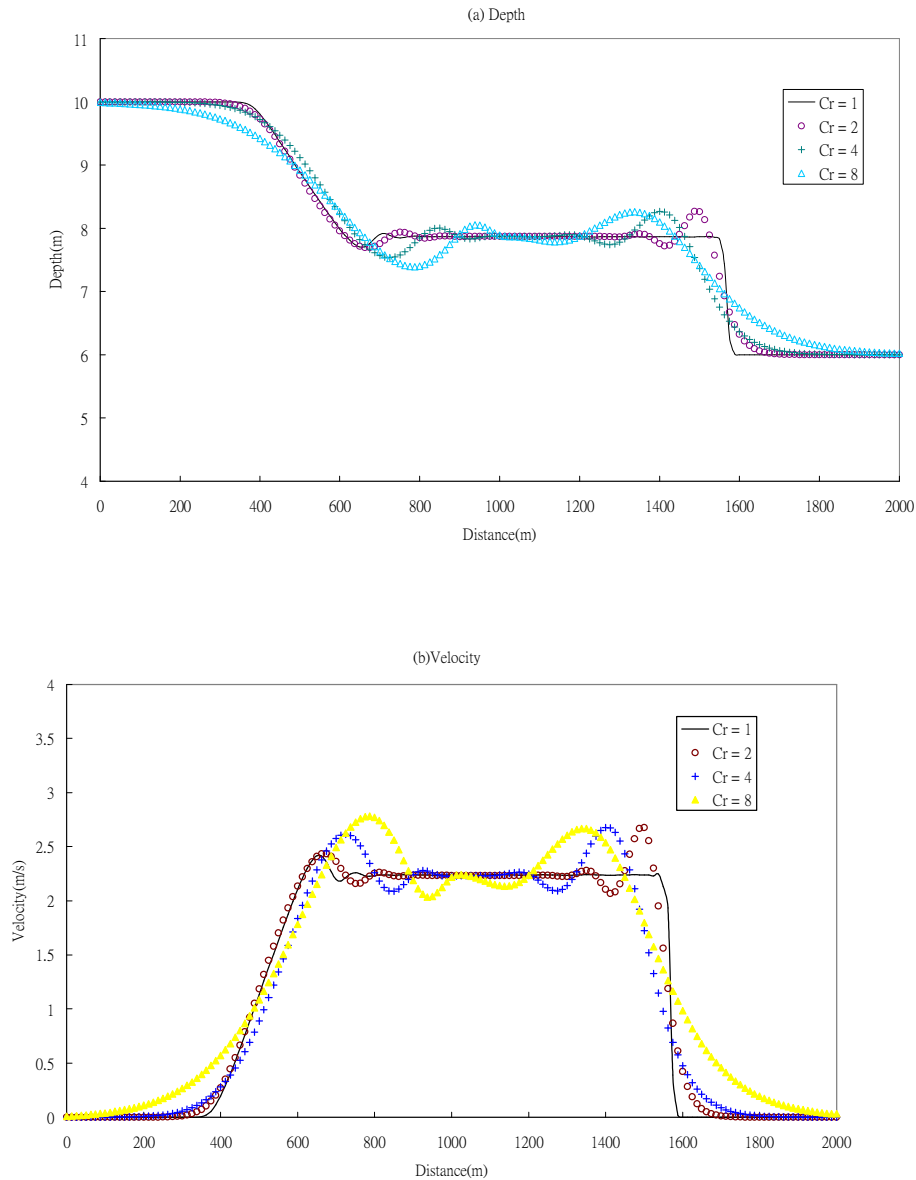




圖一六種算則演算結果與確解的比較圖

4.2 One-dimensional Shallow Water Equations

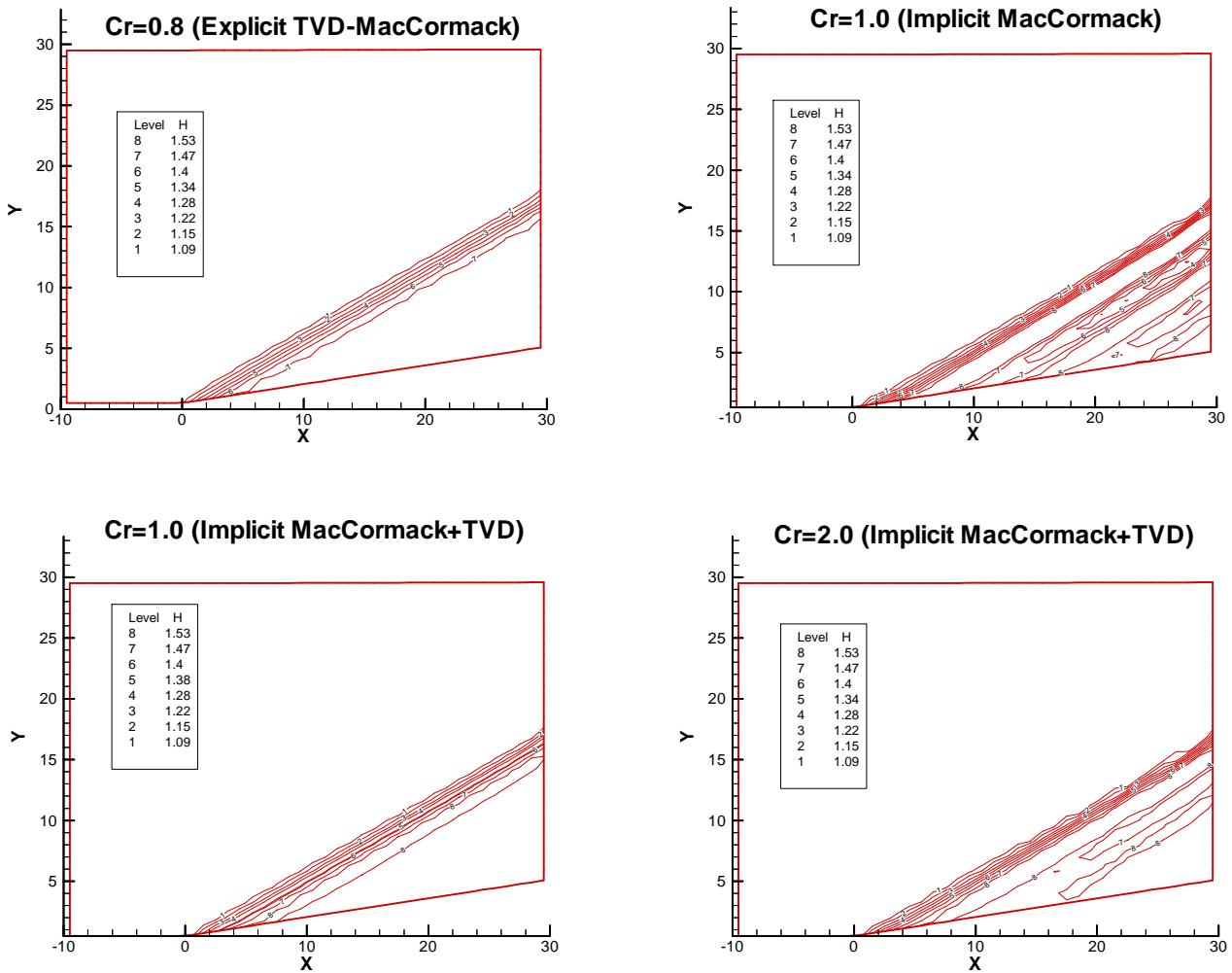
此測試案例為理想狀況下的一維潰壩問題， h_r 和 h_t 分別是水庫的起始水深和下游尾水深。在時間 $t=0$ 時，突然移開水壩會使水以震波形式向上下游傳播。計算條件為兩千公尺長的水平無黏性渠道，壩址位於 $x = 1025$ 公尺處，其起始水深 $h_r=10$ 公尺， $h_t=6$ 公尺，使用 12.5 公尺的網格大小進行計算。圖二(a)(b)分別顯示在 $Cr=1, 2, 4, 8$ 下，implicit MacCormack scheme 的模擬結果，計算的水深剖面與速度剖面雖呈現少許震盪，但顯示即使在 $Cr=8$ 的情況下 implicit MacCormack scheme 仍能穩定求解，相對而言，不論是 explicit MacCormack scheme 或 explicit TVD-MacCormack scheme 演算時距均會受到 $Cr \leq 1$ 的嚴格限制。



圖二 一維潰壩模擬結果

4.3 Two-dimensional Shallow Water Equations

本測試案例為二維傾斜水躍問題，是一超臨界水流沖擊一傾斜壁面相互影響下產生的物理現象。模擬條件為內壁與水流間的角度 $\theta = 8.95^\circ$ 、 $h=1.0\text{m}$ 、 $u=8.57\text{m/s}$ 、 $v = 0.0 \text{ m/s}$ ，這產出 $Fr = 2.74$ 的入射水流，採用 40×30 的非矩形網格進行模擬。確解水深 $h_d = 1.5$ 公尺、在下游的速率為 $|u_d| = 7.9525 \text{ m/s}$ ，且傾斜水躍的角度 $\beta = 30^\circ$ 。模擬結果如圖三所示，explicit TVD-MacCormack scheme 最大只能使用 $Cr=0.8$ 的演算時距進行模擬，而 implicit MacCormack scheme 可計算到 $Cr=2$ 。結果再次顯示，implicit MacCormack scheme 的演算時距可較不受 $Cr \leq 1$ 的嚴格限制。



圖三 二維傾斜水躍模擬結果圖

五、 結論

本研究基於有限體積法，推導出一套新的混合演算法，包含顯式 MacCormack 算則、顯式 TVD-MacCormack 算則、及隱式 MacCormack 算則，可進行一維及二維淺水方程式之數值模擬。測試案例共採用一維 viscous Burgers' equation、一維潰壩問題、及二維傾斜水躍問題進行模式驗證，模擬結果均明白顯示即使在 $Cr > 1$ 的情況下，隱式 MacCormack scheme 仍能穩定求解，相對而言，不論是顯式 MacCormack scheme 或顯式 TVD-MacCormack scheme 的演算時距均會受到 $Cr \leq 1$ 的嚴格限制，導致在實務應用上的困難性。

本研究利用兩個參數可把上述三種不同的演算法整合成同一形式，使用者只要經由參數設定即可進行不同算則之模擬評估以獲取較適合的數值解，對解決不同實務問題時將會有很大助益，希望未來能將模式延伸到本土實務案例的模擬應用。

六、 參考文獻

- (1) Fennema, R. J. and Chaudhry, M. H., (1990), "Explicit Methods for 2D Transient Free Surface Flows", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.116, No.11, pp.1013-1034.
- (2) Fraccarollo, L. and Toro, E. F., (1995), "Experimental and Numerical Assessment of the Shallow Water Model for Two-Dimensional Dam-Break Type Problems", *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol.33, No.6, pp.843-864.
- (3) Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F. and Saviron, J. M., (1992), "1D Open-channel Flow Simulation Using TVD-MacCormack Scheme", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.118, No.10, pp.1359-1372.
- (4) Louaked, M. and Hanich, L., (1998), "TVD Scheme for The Shallow Water Equations", *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol.36, No.3, pp.363-378.
- (5) Mingham, C. G. and Causon, D. M., (1998), "High-resolution Finite-volume Method for Shallow Water Flows", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.124, No.6, pp.605-614.
- (6) Toro, E. F., (1997), "Riemann Solvers and Upwind Methods for Fluid Dynamics", Springer-Verlag, Germany.
- (7) Tseng, M. H. and Yen, C. L. (2004). "Evaluation of some flux-limited high-resolution schemes for dam-break problems with source terms", *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, 42(5), 506-515.
- (8) Tseng, M. H. (2004). "Improved treatment of source terms in TVD scheme for shallow water equations." *Advances in Water Resources*, 27, 617-629.
- (9) Tseng, M. H. and Wang, Sam S. Y. (2004). "One-dimensional channel flow simulations with irregular bed topography." *Journal of Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 16(2), 211-218.
- (10) Tseng, M. H. (2003). "The improved surface gradient method for flows simulation in variable bed topography channel using TVD-MacCormack scheme." *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 43, 71-91.
- (11) Tseng, M. H., Hsu, C. A. and Chu, C. R. (2001). "Channel-routing in open-channel flows with surges." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 127(2), 115-122.
- (12) Tseng, M. H. and Chu, C. R. (2000b). "Simulation of dam-break flow by an improved predictor-corrector TVD." *Advances in Water Resources*, 23, 637-643.
- (13) Tseng, M. H. and Chu, C. R. (2000a). "Two-dimensional shallow water flows simulation using TVD-MacCormack scheme." *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, 38(2), 123-131.
- (14) Tseng, M. H. (1999). "Explicit finite-volume non-oscillatory schemes for 2-D transient free surface flows." *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 30, 831-843.
- (15) Yang, J. Y. and Hsu, C. A., (1993), "Computation of Free Surface Flows, Part 2. Two-Dimensional Unsteady Bore Diffraction", *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, Vol.31, No.3, pp.403-414.
- (16) Zhao, D. H., Shen, H. W., Lai, J. S. and Tabios, G. Q., (1996), "Approximate Riemann Solvers in FVM for 2D Hydraulic Shocf Wave Modeling", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.122, No.12, pp.692-702.